Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA SUPLEMENTAR 3

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESCALARES DE PRIMEIRA ORDEM

Equações Lineares Homogéneas

(1) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + e^t y = 0 \ .$$

Resolução: *Para* $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} + e^t y = 0 &\iff \tfrac{\dot{y}}{y} = -e^t \\ &\iff \int \tfrac{1}{y} dy = -\int e^t dt + c \\ &\iff \ln|y| = -e^t + c \\ &\iff |y(t)| = ke^{-e^t} \qquad \textit{onde } k > 0 \\ &\iff y(t) = ke^{-e^t} \qquad \textit{onde } k \neq 0 \end{aligned}$$

Quando $y = 0$, *encontra-se que a função* $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *também é solução.*
Solução geral:

$$y(t) = ke^{-e^t} \qquad \textit{com } k \in \mathbb{R} \ .$$

Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.
Verificação:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(ke^{-e^t}) = k(-e^t)e^{-e^t} \ ,$$

logo

$$\frac{dy}{dt} + e^t y = k(-e^t)e^{-e^t} + ke^t e^{-e^t} = 0 \qquad \textit{– ok!}$$

□

Comentário: *Esta EDO tem uma família infinita de soluções, família essa parametrizada por* $k \in \mathbb{R}$, *ou seja, para cada* k *real tem-se uma solução. Cada solução está definida em toda a recta real.* ♢

(2) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}\, y = 0 \\ y(0) = \sqrt{5} \ . \end{cases}$$

Resolução:
Resolução da EDO: *Para* $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}\, y = 0 &\iff \tfrac{\dot{y}}{y} = -\sqrt{1+t^2} \\ &\iff \ln|y| = -\int \sqrt{1+t^2}\, dt \end{aligned}$$

Cálculo de uma primitiva de $\sqrt{1+t^2}$: *Fazendo a substituição* $t = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \sinh x$, *para a qual* $\frac{dt}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \cosh x$, *obtém-se*

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+t^2}\, dt &= \int \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2 x}}_{\cosh x} \cosh x\, dx \\
&= \int \cosh^2 x\, dx \qquad \textit{a qual se pode primitivar por partes, ficando} \\
&= \sinh x \cosh x - \int \underbrace{\sinh^2 x}_{\cosh^2 x - 1}\, dx
\end{aligned}$$

Das duas últimas linhas obtém-se

$$2\int \cosh^2 x\, dx = \sinh x \cosh x + x + c \ ,$$

pelo que

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x) + c \ .$$

Falta escrever esta primitiva em termos de t*:*

$$\begin{aligned}
t = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2te^x - 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad e^x = t + \sqrt{1+t^2}
\end{aligned}$$

onde se aplicou a fórmula resolvente para a equação quadrática ($t - \sqrt{1+t^2}$ *não pode ser solução porque é sempre negativo). Logo,*

$$x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \ .$$

Por outro lado,

$$\sinh x = t \qquad \textit{e} \qquad \cosh x = \sqrt{1+t^2} \ .$$

Finalmente, a primitiva em questão fica

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+t^2}\, dt &= \tfrac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})) + c \\
&= \tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \ln\sqrt{t + \sqrt{1+t^2}} + c \ .
\end{aligned}$$

Voltando à EDO,

$$\begin{aligned}
& \ln|y| = -\int \sqrt{1+t^2}\, dt = -\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}} + c \\
\Longleftrightarrow \quad & |y(t)| = k\exp(-\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}) \qquad \textit{onde } k > 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = k\exp(-\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}) \qquad \textit{onde } k \neq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = k\frac{1}{\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}} e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}} \qquad \textit{onde } k \neq 0
\end{aligned}$$

Quando $y = 0$*, encontra-se que a função* $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$*, também é solução.*
Solução geral:

$$y(t) = k\frac{1}{\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}} e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}} \qquad \textit{com } k \in \mathbb{R} \ .$$

Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.

Verificação:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(k\exp(-\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}-\ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}})\right)\\
&= y(t)\cdot\frac{d}{dt}\left(-\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}-\ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}\right)\\
&= y(t)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{1+t^2}-\tfrac{1}{2}\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{2(t+\sqrt{1+t^2})}\right)\\
&= y(t)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{1+t^2}-\frac{t^2(t+\sqrt{1+t^2})+\sqrt{1+t^2}+t}{2\sqrt{1+t^2}(t+\sqrt{1+t^2})}\right)\\
&= y(t)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{1+t^2}\underbrace{-\frac{(1+t^2)(t+\sqrt{1+t^2})}{2\sqrt{1+t^2}(t+\sqrt{1+t^2})}}_{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}}\right)\\
&= -\sqrt{1+t^2}\,y(t) \qquad \text{– ok!}
\end{aligned}$$

Condição inicial: $\sqrt{5}=y(0)=ke^0 \quad\Rightarrow\quad k=\sqrt{5}.$

Solução do problema de valor inicial:

$$y(t)=\sqrt{\frac{5}{t+\sqrt{1+t^2}}}\;e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{onde } k\in\mathbb{R}\ .$$

□

Comentário: *Este problema de valor inicial tem uma única solução definida para todo o t real.* ♢

Equações Lineares

(3) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}+y=\frac{1}{1+t^2} \quad ,y(2)=3$$

Resolução: *O factor de integração desta EDO linear é e^t. Multiplicando por e^t tem-se*

$$e^t\frac{dy}{dt}+e^ty=\frac{e^t}{1+t^2} \iff \frac{d}{dt}(e^ty)=\frac{e^t}{1+t^2}$$

e integrando entre 2 e t, tem-se

$$\begin{aligned}
& e^ty(t)-e^2y(2)=\int_2^t\frac{e^s}{1+s^2}ds\\
\iff\ & y(t)=e^{-t}\left(3e^2+\int_2^t\frac{e^s}{1+s^2}ds\right)\\
\iff\ & y(t)=3e^{2-t}+e^{-t}\left(\int_2^t\frac{e^s}{1+s^2}ds\right)
\end{aligned}$$

Solução:

$$y(t)=3e^{2-t}+e^{-t}\left(\int_2^t\frac{e^s}{1+s^2}ds\right)$$

Intervalo de definição: $\mathbb{R}$

Verificação: *A condição inicial é verificada*

$$y(2) = 3e^0 + e^0\left(\int_2^2 \frac{e^s}{1+s^2}ds\right) = 3 + 0 = 3$$

e a equação também:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -3e^{2-t} - e^{-t}\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}ds + e^{-t}\frac{d}{dt}\left(\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}ds\right)\\ &= -3e^{2-t} - e^{-t}\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}ds + e^{-t}\frac{e^t}{1+t^2}\\ &= -y(t) + \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{- ok!}\end{aligned}$$

□

Comentário: *Como nem sempre é possível primitivar uma função em termos de funções elementares, pode acontecer (como no exercício anterior) que a solução de uma equação diferencial só possa ser apresentada em termos de um integral indefinido.* ◇

(4) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + h(t)y = t \quad , \quad y(-1) = 2$$

onde $h(t)$ é a função definida por

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Resolução: *O factor de integração para esta EDO linear é* $e^{\int h(t)dt}$*. Uma primitiva de* $h(t)$ *pode obter-se por meio de um integral indefinido, por exemplo:*

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Multiplicando pelo factor de integração tem-se

$$e^{H(t)}\frac{dy}{dt} + h(t)e^{H(t)}y = te^{H(t)} \iff \frac{d}{dt}(e^{H(t)}y) = te^{H(t)}$$

e integrando entre -1 *e* t*, tem-se*

$$e^{H(t)}y(t) - e^{H(-1)}y(-1) = \int_{-1}^{t} se^{H(s)}ds$$

$$\iff \quad y(t) = e^{-H(t)}\left(2e^0 + \int_{-1}^{t} se^{H(s)}ds\right)$$

$$\iff \quad y(t) = \begin{cases} 2e^{-H(t)} + e^{-H(t)}\left(\int_{-1}^{0} se^0 ds + \int_0^t se^{\frac{1}{2}s^2}ds\right) & \text{se } t > 0 \\ \\ 2e^{-H(t)} + e^{-H(t)}\int_{-1}^{t} se^0 ds & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad y(t) = \begin{cases} 2e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(-\frac{1}{2} + \left[e^{\frac{1}{2}s^2}\right]_0^t\right) & \text{se } t > 0 \\ \\ 2e^0 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad y(t) = \begin{cases} 2e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(e^{\frac{1}{2}t^2} - \frac{3}{2}\right) & \text{se } t > 0 \\ \\ 2 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1 & \text{se } t > 0 \\ \\ \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

Solução:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1 & \text{se } t > 0 \\ \\ \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

Intervalo de definição: $\mathbb{R}$
Verificação: Primeiro nota-se que

$$y(-1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

Além disso, tem-se, para $t \neq 0$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} -\frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t^2} = -ty(t) + t = -h(t)y(t) + t & \text{se } t > 0 \\ \\ t = -0y(t) + t = -h(t)y(t) + t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Em $t = 0$ *ambas as derivadas laterais de* $y(t)$ *são* 0 *e portanto a equação*

$$\frac{dy}{dt}(0) + h(0)y(0) = 0$$

é satisfeita.

□

Comentário: *Apesar da expressão da solução do problema de valor inicial ter de ser dada por ramos, a função* $y(t)$ *é de classe* C^1*. Isto deve-se ao facto de* $H(t)$ *ser de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}$ *(é uma primitiva da função contínua* $h(t)$*) e à expressão integral para a solução* $y(t)$*.*
◇

(5) Um cardume de salmões vive tranquilamente numa zona costeira. A taxa de natalidade do cardume é de 2 por cento por dia e a taxa de mortalidade de 1 por cento por dia. Em t=0 o cardume tem 1000 salmões e nesse instante chega à zona um tubarão que se dedica a consumir 15 salmões por dia. Quanto tempo demora o tubarão a extinguir o cardume?

Resolução: *Seja $y(t)$ a população de salmões no dia t. A evolução normal da população seria aumentar à taxa de $2-1=1$ por cento por dia. Isto é a população deveria satisfazer a equação diferencial:*

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y$$

No entanto, a partir do momento em que o tubarão chega, morrem mais 15 salmões por dia e portanto tem-se

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y - 15$$

Uma vez que no instante $t = 0$ há 1000 salmões, para responder à questão do enunciado tem de se resolver para $t \geq 0$ o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y - 15 \quad , \quad y(0) = 1000$$

O factor de integração para esta EDO linear é $e^{-0.01t}$. Multiplicando pelo factor de integração tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-0.01t}y(t)\right) = -15e^{-0.01t}$$

e integrando entre 0 e t tem-se

$$\begin{aligned}
& e^{-0.01t}y(t) - 1000 = \int_0^t -15e^{-0.01s}ds \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = e^{0.01t}\left(1000 - \int_0^t 15e^{-0.01s}ds\right) \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = 1000e^{0.01t} - 15e^{0.01t}\left[-\frac{e^{-0.01s}}{0.01}\right]_0^t \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = 1000e^{0.01t} - 1500(e^{0.01t} - 1) \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = 1500 - 500e^{0.01t}
\end{aligned}$$

Solução:

$$y(t) = 1500 - 500e^{0.01t}$$

Intervalo de definição: $\mathbb{R}$
Note-se que apesar de a solução da equação estar definida para $t \in \mathbb{R}$, ela só tem significado físico para $t \geq 0$ e $y(t) \geq 0$.
Verificação: Primeiro nota-se que

$$y(0) = 1500 - 500 = 1000$$

Além disso, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = -5e^{0.01t} = 0.01(y - 1500) = 0.01y(t) - 15 \qquad - ok!$$

Resposta ao problema: O cardume estará extinto quando $y(t) = 0$

$$\begin{aligned} 1500 - 500e^{0.01t} &= 0 \\ e^{0.01t} &= 3 \\ t &= 100 \ln 3 \\ t &= 109.8 \end{aligned}$$

Conclui-se que o tubarão leva aproximadamente 110 dias a extinguir o cardume de salmões.

□

(6) Um resíduo industrial é despejado num tanque cheio com 1000 litros de água a uma taxa de 1 litro por minuto. A mistura bem homogénea é despejada à mesma taxa.
(a) Determine a concentração de resíduos no tanque no instante t.
(b) Quanto tempo leva esta concentração a atingir os 20 por cento?

Resolução:

(a) *Seja* $y(t)$ *a quantidade de resíduo no tanque no minuto* t *em litros. Se o tanque tivesse capacidade ilimitada e não houvesse escoamento, a quantidade de resíduo aumentaria de acordo com a lei*

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

Como se está a admitir que o resíduo se mistura imediatamente e que o tanque se escoa à mesma taxa em que é cheio, a taxa de aumento de resíduo será inferior porque uma parte do resíduo se escoará imediatamente. A questão é: que parte? Uma vez que a mistura é homogénea, a proporção de resíduo no litro que se escoa em cada minuto será idêntica à proporção de resíduo no tanque. Esta proporção é $\frac{y(t)}{1000}$ *portanto conclui-se que a quantidade de resíduo que se escoa por minuto é* $0.001y(t)$ *litros. Donde* $y(t)$ *obedece à lei:*

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0.001y$$

No instante $t = 0$ *não há qualquer resíduo no tanque, portanto*

$$y(0) = 0$$

Para resolver esta EDO linear multiplica-se pelo factor de integração $e^{0.001t}$ *e obtem-se:*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{0.001t}y(t)\right) = e^{0.001t}$$

e integrando entre 0 *e* t *tem-se:*

$$\begin{aligned} & e^{0.001t}y(t) - 0 = \int_0^t e^{0.001s} ds \\ \iff \quad & y(t) = e^{-0.001t}\left(\int_0^t e^{0.001s} ds\right) \\ \iff \quad & y(t) = 1000(1 - e^{-0.001t}) \end{aligned}$$

Solução: A concentração $c(t)$ *de resíduo é igual à quantidade de resíduo a dividir pela capacidade do tanque. Conclui-se que*

$$c(t) = 1 - e^{-0.001t}s$$

Intervalo de definição: $\mathbb{R}$ *(mas a solução só tem significado para* $t \geq 0$*)*
Verificação: Primeiro nota-se que

$$y(0) = 1000(1 - 1) = 0$$

Além disso, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = e^{-0.001t} = -0.001(y-1000) = -0.001y(t)+1 \qquad - ok!$$

(b) *A concentração atinge 20 por cento quando a quantidade de resíduo for 200 litros.*

$$\begin{aligned} 1000(1-e^{-0.001t}) &= 200 \\ e^{-0.001t} &= 1-0.2 \\ t &= -1000\ln 0.8 \\ t &= 223.1 \end{aligned}$$

Portanto a concentração leva aproximadamente 3h e 43m a atingir os 20 por cento.

□

(7)

Chama-se *equação de Bernoulli* a uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)y^n$$

onde $n > 1$ é um número natural.

(a) Determine a solução geral desta equação.

Sugestão: Divida ambos os lados por y^n e transforme a equação numa equação linear fazendo a mudança de variável $u = y^{1-n}$

(b) Ache a solução geral da seguinte equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dt} + y\sin t + y^3 \sin 2t = 0$$

Equações Separáveis

(8)

Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\,.$$

Resolução: *Para* $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} = \tfrac{1}{t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \tfrac{dy}{dt}dt = \int \tfrac{1}{t}dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \int dy = \ln|t| + c \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = \ln|t| + c \end{aligned}$$

Solução geral:

$$y(t) = \ln|t| + c \qquad \text{com } c \in \mathbb{R}\,.$$

Intervalo de definição: $]-\infty, 0[$ *ou* $]0, +\infty[$.

Verificação:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln|t| + c) = \frac{1}{t} \quad (\text{para } t \neq 0) \qquad - ok!$$

□

Comentário: *A equação dada tem duas famílias infinitas de soluções, cada família parametrizada por* $c \in \mathbb{R}$. *As soluções de uma família estão definidas no semi-eixo aberto* $]-\infty, 0[$ *e as soluções da outra família no semi-eixo aberto* $]0, +\infty[$. ♢

(9) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2 \ .$$

Resolução: *Factorizando o segundo membro, e dividindo por $1 + y^2$ (que nunca é zero),*

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{dy}{dt} = (1-t)(1+y^2) \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{\dot{y}}{1+y^2} = 1 - t \\ &\Longleftrightarrow \quad \textstyle\int \tfrac{1}{1+y^2}\, dy = \int (1-t)\, dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \arctan y = t - \tfrac{1}{2}t^2 + c \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = \tan(t - \tfrac{1}{2}t^2 + c) \\ &\qquad\quad \textit{para } t - \tfrac{1}{2}t^2 + c \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \ . \end{aligned}$$

Solução geral:

$$y(t) = \tan(t - \frac{1}{2}t^2 + c) \qquad \textit{com } c \in \mathbb{R} \ .$$

Intervalo de definição: Os intervalos de definição possíveis são os intervalos máximos contidos no conjunto

$$\mathbb{R} \setminus \{t \in \mathbb{R} : \ t - \frac{1}{2}t^2 + c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Verificação:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} &= \tfrac{d}{dt}[\tan(t - \tfrac{1}{2}t^2 + c)] \\ &= (1-t)[1 + \tan^2(t - \tfrac{1}{2}t^2 + c)] \\ 1 - t + y^2 - ty^2 &= (1-t)(1+y^2) \\ &= (1-t)[1 + \tan^2(t - \tfrac{1}{2}t^2 + c)] \qquad \textit{– ok!} \end{aligned}$$

□

Comentário: *Os possíveis intervalos de definição da solução foram apenas apresentados implicitamente como intervalos abertos de comprimento máximo contidos no conjunto*

$$\mathbb{R} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t - \frac{1}{2}t^2 + c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Por outras palavras, um intervalo de definição concreto terá por extremos duas soluções consecutivas da equação quadrática

$$\frac{1}{2}t^2 - t - c + \frac{\pi}{2} + k\pi = 0$$

com k a variar em $\mathbb{Z}$. Se fosse dada uma condição incial, escolher-se-ia a constante real c e determinar-se-ia o intervalo que contivesse o instante inicial.

Por exemplo, se fosse dada a condição inicial $y(0) = 0$, a constante c teria que satisfazer $0 = y(0) = \tan c$. Escolhendo $c = 0$, o intervalo de definição da solução deste problema de valor inicial seria o intervalo máximo contido no conjunto

$$\mathbb{R} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t - \frac{1}{2}t^2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\}$$

que contém o instante $t = 0$. Resolvendo a equação quadrática

$$t^2 - 2t + \pi + 2k\pi = 0 \iff t = 1 \pm \sqrt{1 - \pi - 2k\pi}$$

(com $k \in \mathbb{Z}$), obtém-se que as soluções mais próximas de $t = 0$ são

$$t = 1 - \sqrt{1+\pi} \qquad \text{e} \qquad t = 1 + \sqrt{1+\pi}\ .$$

Sendo estes os dois instantes mais próximos de 0 onde a solução explode, conclui-se que o problema de valor inical

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

teria por solução

$$y(t) = \tan(t - \frac{1}{2}t^2)$$

definida para

$$t \in]1 - \sqrt{1+\pi}, 1 + \sqrt{1+\pi}[\ .$$

(10) Suponha que temos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)\ ,$$

como, por exemplo, a equação $\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(\frac{y}{t})$. Estas equações dizem-se *homogéneas*. Como o segundo membro da equação depende apenas do quociente $\frac{y}{t}$, é natural fazer a substituição $v = \frac{y}{t}$, ou seja, $y = vt$.
Mostre que esta substituição transforma $\frac{dy}{dt} = f(\frac{y}{t})$ na equação equivalente

$$t\frac{dv}{dt} + v = f(v)\ ,$$

que é separável.

Resolução: *Supõe-se que $t \neq 0$. Se $y(t) = tv(t)$, então*

$$\frac{dy}{dt} = t\frac{dv}{dt} + v\ ,$$

pelo que a equação $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$ fica

$$t\frac{dv}{dt} + v = f(v)\ ,$$

que é separável:

$$\frac{\dot{v}}{f(v) - v} = \frac{1}{t} \qquad \text{para } f(v) \neq v\ .$$

□

(11) Determine se cada uma das seguintes funções de t e y pode ser expressa como uma função de uma só variável $\frac{y}{t}$:
(a) $\ln y - \ln t + \frac{t+y}{t-y}$,
(b) $\frac{y^3+t^3}{yt^2+y^3}$.

Resolução:

(a) *Sim: fundindo os logaritmos e dividindo numerador e denominador da fracção por t, fica*

$$\ln y - \ln t + \frac{t+y}{t-y} = \ln \frac{y}{t} + \frac{1+\frac{y}{t}}{1-\frac{y}{t}} \ .$$

(b) *Sim para $t \neq 0$: dividindo numerador e denominador da fracção por t^3, fica*

$$\frac{y^3+t^3}{yt^2+y^3} = \frac{(\frac{y}{t})^3+1}{\frac{y}{t}+(\frac{y}{t})^3} \ .$$

Para $t = 0$, a função original vale 1 (ou tem limite 1 quando $y \to 0$), mas a substituição para a variável $\frac{y}{t}$ não é legal.

□

Comentário: *Na alínea* (b), *a resposta estrita é "não". No entanto, pode ser útil saber exprimir a função em termos de uma só variável no domínio $t \neq 0$.* ♢

(12) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$t^2 \frac{dy}{dt} = 2ty + y^2 \ .$$

Sugestão: Exercício 10.

Resolução: *Para $t \neq 0$, divida-se a equação por t^2 e depois aplique-se o exercício 10:*

$$\frac{dy}{dt} = 2\frac{y}{t} + (\tfrac{y}{t})^2 \iff t\frac{dv}{dt} + v = 2v + v^2$$

$$\iff \frac{\dot v}{v+v^2} = \frac{1}{t} \qquad \text{para } v + v^2 \neq 0$$

$$\iff \int \frac{1}{v+v^2}\, dv = \int \frac{1}{t}\, dt + c \ .$$

Cálculo de uma primitiva de $\frac{1}{v+v^2}$:

Decompõe-se $\frac{1}{v+v^2}$ em fracções simples:

$$\frac{1}{v(1+v)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1+v} \iff 1 = A + Av + Bv$$

$$\iff A = 1 \quad \text{and} \quad B = -1 \ .$$

Logo, uma primitiva de $\frac{1}{v+v^2}$ é

$$\int \frac{1}{v}\, dv - \int \frac{1}{1+v}\, dv = \ln|v| - \ln|1+v| \ .$$

Continuando a resolução da equação:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1}{v+v^2}\,dv = \int \tfrac{1}{t}\,dt + c \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln|v| - \ln|1+v| = \ln|t| + c \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln\left|\tfrac{v}{1+v}\right| = \ln|t| + c \\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{v}{1+v} = kt \qquad \textit{onde } k \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad v - kt - ktv = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad v(1-kt) = kt \\
&\Longleftrightarrow \quad v(t) = \tfrac{kt}{1-kt} \\
&\Longleftrightarrow \quad y(t) = \tfrac{kt^2}{1-kt}
\end{aligned}$$

onde na última linha se substituiu v de volta por $\frac{y}{t}$.

Apesar da técnica de resolução só se aplicar quando $t \neq 0$, a extensão da função y acima para $t = 0$ é válida e permanece solução da equação.

Falta estudar os casos em que $v + v^2 = v(v+1) = 0$ (onde $v = \frac{y}{t}$) excluídos no início da resolução:

– quando $v = 0$, obtém-se que $y(t) = 0$, $\forall t$, é solução, que pode ser descrita na forma acima para $k = 0$;

– quando $v = -1$, verifica-se, por substituição na equação diferencial, que $y(t) = -t$, $\forall t$, também é solução:

$$t^2 \frac{d}{dt}(-t) = -t^2 = 2t(-t) + (-t)^2 \ .$$

Solução geral:

$$y(t) = \frac{kt^2}{1-kt} \quad \textit{com } k \in \mathbb{R} \qquad \textit{ou} \qquad y(t) = -t \ .$$

Intervalo de definição: Para $k \neq 0$, o intervalo de definição de uma solução da primeira forma é

$$]-\infty, \frac{1}{k}[\qquad \textit{ou} \qquad]\frac{1}{k}, \infty[\ .$$

Para $k = 0$, o intervalo de definição de $y(t) = 0$ é $\mathbb{R}$. O intervalo de definição da solução $y(t) = -t$ também é $\mathbb{R}$.

Verificação:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{2kt(1-kt)+k^2t^2}{(1-kt)^2} \\
t^2\frac{dy}{dt} &= \frac{2kt^3(1-kt)+k^2t^4}{(1-kt)^2} \\
2ty + y^2 &= \frac{2kt^3}{1-kt} + \frac{k^2t^4}{(1-kt)^2} \\
&= \frac{2kt^3(1-kt)+k^2t^4}{(1-kt)^2} = t^2\frac{dy}{dt} \qquad \textit{– ok!}
\end{aligned}$$

□

Comentário: *A equação dada tem duas famílias de soluções definidas em subintervalos de $\mathbb{R}$, cada uma parametrizada por $k \neq 0$, e tem ainda mais duas soluções definidas em todo o $\mathbb{R}$.* ♢

(13) Um objecto de massa m é lançado verticalmente a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial V_0. Considera-se um referencial em que o sentido positivo do eixo dos y's coincida com a direcção vertical apontando para cima, estando a origem sobre a superfície da Terra. Assumindo que não há resistência do ar, mas considerando a variação do campo gravitacional terrestre com a altitude, obtém-se a seguinte lei para a velocidade $V(t)$ do objecto:

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{mgR^2}{(y+R)^2}$$

onde R é o raio da Terra.

(a) Seja $V(t) = v(y(t))$, onde $v = v(y)$ é a velocidade como função da altitude y. Determine a equação diferencial satisfeita por $v(y)$.

(b) Calcule a chamada *velocidade de escape*, ou seja, calcule a menor velocidade inicial V_0 para a qual o objecto não regressa à Terra.

Sugestão: A velocidade de escape é determinada impondo que $v(y)$ permaneça positivo.

(14) Considere uma espécie com reprodução sexuada: cada membro da população necessita de encontrar um parceiro para se reproduzir. Se $N(t)$ for a população total no instante t, o número de encontros entre machos e fêmeas deve ser proporcional ao produto do número de machos pelo número de fêmeas. Como cada um destes números é proporcional a $N(t)$, o número de nascimentos é proporcional a $N^2(t)$. Por outro lado, a taxa de mortalidade, é proporcional a $N(t)$ pois não depende de encontros entre indivíduos.

Conclui-se que a população $N(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = bN^2 - aN \quad , \text{ com } a, b > 0$$

Mostre que, se $N(0) < \frac{a}{b}$ então $N(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Conclua que quando a população é inferior ao nível crítico $\frac{a}{b}$ a população está em vias de extinção.

Equações Exactas

(15) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$2t\sin y + y^3e^t + (t^2\cos y + 3y^2e^t)\frac{dy}{dt} = 0\ .$$

Resolução: *Esta equação não é linear nem separável.*

Teste de equação exacta:

A equação

$$\underbrace{2t\sin y + y^3e^t}_{M(t,y)} + \underbrace{(t^2\cos y + 3y^2e^t)}_{N(t,y)}\frac{dy}{dt} = 0$$

é exacta se e só se existe uma função "potencial", $F = F(t, y)$, tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & M(t,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & N(t,y) \end{cases}$$

(por definição de equação exacta*).*

Uma vez que as expressões de $M(t,y)$ e $N(t,y)$ são continuamente diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}^2$, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma tal função potencial F é[1]

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}\ .$$

Ora

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2t\cos y+3y^2e^t=\frac{\partial N}{\partial t}\ ,$$

pelo que se conclui que a equação é exacta.

Resolução da EDO:

Determina-se uma função "potencial", F:

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial t} &= 2t\sin y+y^3e^t\\[2mm] \frac{\partial F}{\partial y} &= t^2\cos y+3y^2e^t\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}F(t,y) &= \int(2t\sin y+y^3e^t)\,dt+f(y)\\[2mm] F(t,y) &= \int(t^2\cos y+3y^2e^t)\,dy+g(t)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}F(t,y) &= t^2\sin y+y^3e^t+f(y)\\[2mm] F(t,y) &= t^2\sin y+y^3e^t+g(t)\end{cases}$$

Escolhendo

$$F(t,y)=t^2\sin y+y^3e^t\ ,$$

a equação diferencial fica equivalente a

$$\frac{d}{dt}F(t,y(t))=0\iff F(t,y)=c\iff t^2\sin y+y^3e^t=c\ .$$

Solução:

$$t^2\sin y+y^3e^t=c\qquad(\star)\qquad \textit{com}\ \ c\in\mathbb{R}\ .$$

Verificação:

$$\begin{aligned}&t^2\sin y+y^3e^t \qquad \textit{é constante}\\ \iff\ &\tfrac{d}{dt}\left(t^2\sin y+y^3e^t\right)=0\\ \iff\ &\tfrac{\partial}{\partial t}\left(t^2\sin y+y^3e^t\right)+\tfrac{\partial}{\partial y}\left(t^2\sin y+y^3e^t\right)\tfrac{dy}{dt}=0\\ \iff\ &2t\sin y+y^3e^t+(t^2\cos y+3y^2e^t)\tfrac{dy}{dt}=0 \qquad \textit{– ok!}\end{aligned}$$

□

Comentário: *Pelo teorema da função implícita, se for dada uma condição inicial, $y(t_0)=y_0$, a expressão $(\star)$ determina $y=y(t)$ em torno de $t=t_0$, desde que seja satisfeita a condição*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t_0,y_0)\neq 0\ ,$$

ou seja,

$$t_0^2\cos y_0+3y_0^2e^{t_0}\neq 0\ .$$

[1] Cf. Análise Matemática III: condição para um campo vectorial $(M(t,y),N(t,y))$ ser o gradiante, $\nabla F=(\frac{\partial F}{\partial t},\frac{\partial F}{\partial y})$, de alguma função escalar $F(t,y)$.

(16) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2)\frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Resolução: *A equação diferencial não é linear nem separável.*
Teste de equação exacta:
A equação diferencial

$$\underbrace{3t^2 + 4ty}_{M(t,y)} + \underbrace{(2y + 2t^2)}_{N(t,y)} \frac{dy}{dt} = 0$$

é exacta se e só se existe uma função "potencial", $F = F(t, y)$, tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & M(t, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & N(t, y) \end{cases}$$

(por definição de equação exacta*).*

Uma vez que as expressões de $M(t, y)$ e $N(t, y)$ são continuamente diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}^2$, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma tal função potencial F é[2]

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \ .$$

Ora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4t = \frac{\partial N}{\partial t} \ ,$$

pelo que se conclui que a equação é exacta.
Resolução da EDO:
Para encontrar uma função "potencial", F, resolve-se o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & 3t^2 + 4ty \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & 2y + 2t^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} F(t, y) & = & \int (3t^2 + 4ty)\, dt + f(y) \\ \\ F(t, y) & = & \int (2y + 2t^2)\, dy + g(t) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} F(t, y) & = & t^3 + 2t^2 y + f(y) \\ \\ F(t, y) & = & y^2 + 2t^2 y + g(t) \end{cases}$$

Escolhendo

$$F(t, y) = t^3 + y^2 + 2t^2 y \ ,$$

a equação diferencial fica equivalente a

$$\frac{d}{dt}F(t, y(t)) = 0 \iff F(t, y) = c \iff t^3 + y^2 + 2t^2 y = c \ .$$

[2]Cf. Análise Matemática III: condição para um campo vectorial $(M(t, y), N(t, y))$ ser o gradiante, $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial y})$, de alguma função escalar $F(t, y)$.

Condição inicial:
A condição $y(0) = 1$ impõe que a constante real c satisfaça

$$0^3 + 1^2 + 2 \cdot 0^2 \cdot 1 = c \iff c = 1 .$$

A solução do problema de valor inicial é dada por

$$\begin{aligned} t^3 + y^2 + 2t^2 y = 1 &\iff y^2 + 2t^2 y + t^3 - 1 = 0 \\ &\iff y(t) = -t^2 \pm \sqrt{t^4 - t^3 + 1} . \end{aligned}$$

Para que $y(0) = 1$, escolhe-se o sinal $+$ para a raiz quadrada.
Intervalo de definição:
– Para que $y = y(t)$ esteja definida, o argumento da raiz quadrada tem que ser não-negativo.
– Para que $y = y(t)$ seja diferenciável, o argumento da raiz quadrada tem que ser positivo, o que acontece sempre:

- *quando $t \geq 1$, tem-se $t^4 \geq t^3$, logo $t^4 - t^3 + 1 \geq 1$;*
- *quando $t \leq 0$, tem-se $t^4 \geq 0$ e $-t^3 \geq 0$, logo $t^4 - t^3 + 1 \geq 1$;*
- *quando $0 < t < 1$, tem-se $t^4 > 0$ e $t^3 < 1$, logo $t^4 - t^3 + 1 > 0$.*

Conclui-se que o intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$.
Solução do problema de valor inicial:

$$y(t) = -t^2 + \sqrt{t^4 - t^3 + 1} , \quad \text{para todo o } t \in \mathbb{R} .$$

Verificação:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} &= \tfrac{d}{dt}\left(-t^2 + \sqrt{t^4 - t^3 + 1}\right) \\ &= -2t + \tfrac{4t^3 - 3t^2}{2\sqrt{t^4 - t^3 + 1}} \\ 2y + 2t^2 &= 2\sqrt{t^4 - t^3 + 1} \\ (2y + 2t^2)\tfrac{dy}{dt} &= -4t\sqrt{t^4 - t^3 + 1} + 4t^3 - 3t^2 \qquad (\star) \\ 3t^2 + 4ty &= 3t^2 - 4t^3 + 4t\sqrt{t^4 - t^3 + 1} \qquad (\star\star) \\ (\star\star) + (\star) &= 0 \qquad \text{– ok!} \\ y(0) &= -0 + \sqrt{0 - 0 + 1} = 1 \qquad \text{– ok!} \end{aligned}$$

□

(17) Determine a constante real α para a qual a equação diferencial seguinte é exacta e resolva-a:

$$e^{\alpha t + y} + 3t^2 y^2 + (2yt^3 + e^{\alpha t + y})\frac{dy}{dt} = 0 .$$

Resolução:
Determinação de α:
A equação

$$\underbrace{e^{\alpha t + y} + 3t^2 y^2}_{M(t,y)} + \underbrace{(2yt^3 + e^{\alpha t + y})}_{N(t,y)} \frac{dy}{dt} = 0$$

é exacta se e só se existe uma função "potencial", $F = F(t,y)$, tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} &= M(t,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= N(t,y) \end{cases}$$

(por definição de equação exacta*).*

Uma vez que as expressões de $M(t,y)$ e $N(t,y)$ são continuamente diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}^2$, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma tal função potencial F é[3]

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \ .$$

Há então que escolher α de modo a satisfazer a equação

$$e^{\alpha t + y} + 6t^2 y = 6yt^2 + \alpha e^{\alpha t + y} \iff \alpha = 1 \ .$$

Para que a equação seja exacta, a constante α deve ser 1.

Resolução da equação para $\alpha = 1$:

Quando $\alpha = 1$, encontra-se uma função "potencial", F, resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} &= e^{t+y} + 3t^2y^2 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2yt^3 + e^{t+y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(t,y) &= \int (e^{t+y} + 3t^2y^2)\,dt + f(y) \\ \\ F(t,y) &= \int (2yt^3 + e^{t+y})\,dy + g(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(t,y) &= e^{t+y} + t^3y^2 + f(y) \\ \\ F(t,y) &= y^2t^3 + e^{t+y} + g(t) \end{cases}$$

Uma solução possível é

$$F(t,y) = t^3y^2 + e^{t+y} \ .$$

A equação dada é equivalente a

$$\frac{d}{dt}F(t,y(t)) = 0 \iff F(t,y) = c \iff t^3y^2 + e^{t+y} = c \ .$$

Solução:

$$t^3y^2 + e^{t+y} = c \qquad (\star) \qquad \text{com } c \in \mathbb{R} \ .$$

Verificação:

$$\begin{aligned} & t^3y^2 + e^{t+y} \qquad \text{é constante} \\ \iff & \tfrac{d}{dt}\left(t^3y^2 + e^{t+y}\right) = 0 \\ \iff & \tfrac{\partial}{\partial t}\left(t^3y^2 + e^{t+y}\right) + \tfrac{\partial}{\partial y}\left(t^3y^2 + e^{t+y}\right)\tfrac{dy}{dt} = 0 \\ \iff & 3t^2y^2 + e^{t+y} + (2yt^3 + e^{t+y})\tfrac{dy}{dt} = 0 \qquad \text{– ok!} \end{aligned}$$

□

[3] Cf. Análise Matemática III: condição para um campo vectorial $(M(t,y), N(t,y))$ ser o gradiante, $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial y})$, de alguma função escalar $F(t,y)$.

Comentário: *Pelo teorema da função implícita, se for dada uma condição inicial,* $y(t_0) = y_0$*, a expressão* $(\star)$ *determina* $y = y(t)$ *em torno de* $t = t_0$*, desde que seja satisfeita a condição*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0 \ ,$$

ou seja,

$$2y_0 t_0^3 + e^{t_0 + y_0} \neq 0 \ ,$$

É possível ver que para esta equação diferencial, as condições iniciais só são admissíveis se satisfizerem a condição do teorema da função implícita:

Suponha-se (por redução ao absurdo) que existia uma solução com condição inicial (t_0, y_0) *tal que*

$$2y_0 t_0^3 + e^{t_0 + y_0} = 0 \ .$$

A própria EDO avaliada em (t_0, y_0) *imporia também que*

$$e^{t_0 + y_0} + 3t_0^2 y_0^2 = 0 \ .$$

Nesse caso, teria que ser $t_0 \neq 0$ *e* $y_0 \neq 0$*. Então*

$$2y_0 t_0^3 = 3t_0^2 y_0^2 \iff 2t_0 = 3y_0 \iff y_0 = \frac{2}{3} t_0 \ .$$

Voltando a substituir, ficaria

$$0 = 2y_0 t_0^3 + e^{t_0 + y_0}\Big|_{y_0 = \frac{2}{3}t_0} = \frac{4}{3} t_0^4 + e^{\frac{5}{3} t_0} \ ,$$

o que é impossível, pois a exponencial é sempre positiva e o primeiro termo nunca é negativo. ♢

(18) Mostre que qualquer equação separável da forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

é exacta.

Resolução: *Para* $f(y) \neq 0$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)} \iff \underbrace{g(t)}_{M(t,y)} \underbrace{-f(y)}_{N(t,y)} \frac{dy}{dt} = 0 \ .$$

A equação é exacta se e só se existe uma função "potencial", $F = F(t, y)$*, tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} &= M(t,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= N(t,y) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} &= g(t) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -f(y) \end{cases}$$

$$\iff \quad F(t,y) = \int g(t)\, dt - \int f(y)\, dy + c$$

Portanto, qualquer equação separável da forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

é exacta; além disso, é equivalente, para $f(y) \neq 0$*, a*

$$\int g(t)\, dt - \int f(y)\, dy = \text{ constante } .$$

□

Equações Redutíveis a Exactas

(19) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$3ty + y^2 + (t^2 + ty)\dot{y} = 0 \ , \qquad y(2) = 1$$

Resolução: *A equação não é linear nem separável. Também não é exacta porque:*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3ty + y^2\right) = 3t + 2y \neq 2t + y = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 + ty\right)$$

Assim, resta tentar encontrar um factor de integração μ. A equação que μ tem de verificar para ser um factor de integração é

$$\frac{\partial}{\partial y}\left((3ty + y^2)\mu\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((t^2 + ty)\mu\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (3t + 2y)\mu + (3ty + y^2)\frac{\partial \mu}{\partial y} = (2t + y)\mu + (t^2 + ty)\frac{\partial \mu}{\partial t}$$

Como não se aprende a resolver estas equações em AMIV, tenta-se achar um factor de integração que seja só função de y ou só função de t. Nesse caso a equação anterior simplifica-se porque uma das derivadas parciais de μ é nula.

A equação tem um factor de integração $\mu = \mu(y)$? Em caso afirmativo, o factor de integração tem de satisfazer a equação:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(3ty + y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(t^2 + ty)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d\mu}{dy}(3ty + y^2) + \mu(y)(3t + 2y) = \mu(y)(2t + y)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\frac{d\mu}{dy}}{\mu} = \frac{t + y}{3ty + y^2}$$

Esta equação não tem solucões! Isto porque no termo esquerdo tem-se uma função de y e no termo direito uma função que depende de t e de y. Conclui-se que não existe um factor integrante que seja função só de y.

A equação tem um factor de integração $\mu = \mu(t)$? Em caso afirmativo, o factor de integração tem de satisfazer a equação:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(3ty + y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(t^2 + ty)\right) \qquad (\star)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mu(t)(3t + 2y) = \mu(t)(2t + y) + \frac{d\mu}{dt}(t^2 + ty)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\frac{d\mu}{dt}}{\mu} = \frac{t + y}{ty + t^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\frac{d\mu}{dt}}{\mu} = \frac{1}{t}$$

Esta equação tem solução. Pode-se tomar por exemplo $\mu(t) = t$ para $t \neq 0$.

Resolução da equação usando o factor de integração: Multiplicando a equação pelo factor de integração obtem-se

$$3t^2y + y^2t + (t^3 + t^2y)\dot{y} = 0 \qquad (\star\star)$$

que é equivalente ao problema que queremos resolver para $t \neq 0$. Como $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo, a condição $(\star)$ é suficiente para a existência de uma função potencial para o campo vectorial (M, N)

$$M(t,y) = 3t^2y + y^2t \quad , \quad N(t,y) = t^3 + t^2y$$

Sendo $\phi(t,y)$ a função potencial tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 3t^2y + y^2t \\ \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = t^3 + t^2y \end{cases} \iff \begin{cases} \phi(t,y) = t^3y + \frac{1}{2}y^2t^2 + A(y) \\ \\ \phi(t,y) = t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2 + B(t) \end{cases}$$

Portanto, um potencial para o campo (M, N) é

$$\phi(t,y) = t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2$$

A equação $(\star\star)$ escreve-se

$$\frac{d}{dt}\left(\phi(t,y(t)\right) = 0$$

Portanto as soluções da equação verificam

$$t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2 = C$$

e a constante pode ser determinada pelo valor inicial

$$y(2) = 1 \implies 2^3 1 + \frac{1}{2}2^2 1^2 = C \iff C = 10$$

Ou seja, utilizando a fórmula resolvente,

$$\begin{aligned} & t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2 - 10 = 0 \\ \iff \quad & y = \frac{-t^3 \pm \sqrt{t^6 + 20t^2}}{t^2} \\ \iff \quad & y = -t \pm \sqrt{t^2 + \frac{20}{t^2}} \end{aligned}$$

A condição inicial força o sinal "+" na equação anterior.
Solução do problema de valor inicial:

$$y(t) = -t + \sqrt{t^2 + \frac{20}{t^2}}$$

Esta é a solução do problema de valor inicial pretendido para $t \neq 0$. Como o limite de $y(t)$ é infinito quando $t \to 0$, conclui-se que o intervalo máximo de definição da solução é $]0, +\infty[$ (e portanto a condição que impusemos ($t \neq 0$) é irrelevante para a solução deste problema de valor inicial).
Verificação:

$$y(2) = -2 + \sqrt{4 + \frac{20}{4}} = 1$$

Quanto à equação, fazendo $u = \sqrt{t^2 + \frac{20}{t^2}}$ e notando que

$$\frac{du}{dt} = \frac{2t - \frac{40}{t^3}}{2u} = \frac{t^4 - 20}{t^3 u}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
& 3ty + y^2 + (t^2 + ty)\dot{y} \\
= \ & 3t(-t+u) + (-t+u)^2 + (t^2 + t(-t+u))\left(-1 + \frac{t^4 - 20}{t^3 u}\right) \\
= \ & -3t^2 + 3tu + t^2 - 2tu + u^2 - tu + t^2 - \frac{20}{t^2} \\
= \ & 0 \qquad - ok!
\end{aligned}$$

□

(20) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y^3 + 2yt + (4y^2 t + 2t^2)\dot{y} = 0 \ , \qquad y(1) = 1$$

(21) A equação diferencial

$$6y(t+y) + t(4t+9y)\frac{dy}{dt} = 0$$

admite um factor de integração da forma $\mu(ty)$, ou seja, um factor μ que só depende do produto das variáveis ty. Determine-o e dê a solução da equação com $y(1) = 1$.

Sugestão: A equação diferencial que dá $\mu = \mu(ty)$ pode ser escrita em termos de uma só variável $v = ty$.

Resolução:

Cálculo de um factor de integração: Uma função, $\mu = \mu(ty)$, que nunca se anula é factor de integração da equação dada se e só se

$$\mu(ty)\left[6y(t+y) + t(4t+9y)\frac{dy}{dt}\right] = 0 \qquad \text{é equação exacta.}$$

Para tal, uma condição necessária é

$$\begin{aligned}
& \tfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu(ty)6y(t+y)\right] = \tfrac{\partial}{\partial t}\left[\mu(ty)t(4t+9y)\right] \\
\iff \ & t\mu'(ty)6y(t+y) + 6t\mu(ty) + 12y\mu(ty) = \\
& = y\mu'(ty)t(4t+9y) + \mu(ty)8t + \mu(ty)9y \\
\iff \ & \underbrace{(2t^2 y - 3ty^2)}_{ty(2t-3y)}\mu'(ty) + \underbrace{(3y-2t)}_{-(2t-3y)}\mu(ty) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Pondo $v = ty$, é suficiente resolver a seguinte equação separável com $\mu \neq 0$ e $v \neq 0$:

$$\begin{aligned}
v\mu'(v) - \mu(v) = 0 \quad & \iff \quad \tfrac{\mu'(v)}{\mu(v)} = \tfrac{1}{v} \\
& \iff \quad \ln|\mu(v)| = \ln|v| + c \\
& \iff \quad |\mu(v)| = k|v| \qquad \text{com } k > 0 \\
& \iff \quad \mu(v) = kv \qquad \text{com } k \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

Como basta um factor de integração, escolhemos $k = 1$, ou seja,

$$\mu(ty) = ty \ .$$

Resolução da EDO usando o factor de integração encontrado: *Para* $t \neq 0$ *e* $y \neq 0$, *a equação dada é equivalente à seguinte equação exacta:*

$$ty\left[6y(t+y) + t(4t+9y)\frac{dy}{dt}\right] = 0 \ .$$

Uma função "potencial", $F(t, y)$, *determina-se através de*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} &=& 6ty^2(t+y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &=& t^2y(4t+9y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(t,y) &=& \int 6ty^2(t+y)\,dt + f(y) \\ F(t,y) &=& \int t^2y(4t+9y)\,dy + g(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(t,y) &=& 2t^3y^2 + 3t^2y^3 + f(y) \\ F(t,y) &=& 2t^3y^2 + 3t^2y^3 + g(t) \end{cases}$$

Uma solução possível é

$$F(t,y) = 2t^3y^2 + 3t^2y^3 \ .$$

A solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{d}{dt}F(t,y) = 0 \iff F(t,y) = c \iff 2t^3y^2 + 3t^2y^3 = c \ .$$

Verificação: *Para* $ty \neq 0$,

$$\begin{aligned} & 2t^3y^2 + 3t^2y^3 \qquad \text{é constante} \\ \iff\ & \tfrac{d}{dt}\left(2t^3y^2 + 3t^2y^3\right) = 0 \\ \iff\ & \tfrac{\partial}{\partial t}\left(2t^3y^2 + 3t^2y^3\right) + \tfrac{\partial}{\partial y}\left(2t^3y^2 + 3t^2y^3\right)\tfrac{dy}{dt} = 0 \\ \iff\ & ty[6y(t+y)] + ty[t(4t+9y)]\tfrac{dy}{dt} = 0 \\ \iff\ & 6y(t+y) + t(4t+9y)\tfrac{dy}{dt} = 0 \qquad \text{– ok!} \end{aligned}$$

Solução do problema de valor inicial: *A condição* $y(1) = 1$ *impõe que a constante* c *satisfaça*

$$2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = c \iff c = 5 \ .$$

Pelo teorema da função implícita, como

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = t^2y(4t+9y)\big|_{t=1,y=1} = 13 \neq 0 \ ,$$

conclui-se que a solução do problema de valor inicial é dada por

$$2t^3y^2 + 3t^2y^3 = 5$$

para t *numa vizinhança de* $t_0 = 1$. □

Comentário: *Esta solução poderia ser escrita explicitamente usando a fórmula resolvente para a equação do 3º grau.* ♢

Existência, Unicidade e Extensão de Soluções

(22) Determine uma solução contínua do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + y = g(t) \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad t > 1 \ . \end{cases}$$

Resolução: *Para* $0 \leq t \leq 1$, $\mu(t) = e^t$ *é um factor de integração:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + y = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^t \frac{dy}{dt} + e^t y = 2e^t \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^t y) = 2e^t \\ &\Longleftrightarrow \quad e^t y = \int 2e^t \ dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = e^{-t}(2e^t + c) = 2 + ce^{-t} \end{aligned}$$

Condição inicial: $0 = y(0) = 2 + c \Rightarrow c = -2$.
Solução do problema de valor inicial para $0 \leq t \leq 1$*:*

$$y(t) = 2 - 2e^{-t} \ .$$

Continuação da solução para $t > 1$*: Quando* $t > 1$*, a equação é homogénea; para* $y \neq 0$ *resolve-se pelo método de separação de variáveis:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y} = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{\dot{y}}{y} \ dt = -\int dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y} \ dy = -t + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln |y| = -t + c \\ &\Longleftrightarrow \quad |y(t)| = ke^{-t} \qquad \text{onde } k > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = ke^{-t} \qquad \text{onde } k \neq 0 \ . \end{aligned}$$

A função $y(t) = 0$, $\forall t$*, também é solução. Logo, a solução geral da equação diferencial para* $t > 1$ *é*

$$y(t) = ke^{-t} \qquad \text{onde } k \in \mathbb{R} \ .$$

Para obter uma solução contínua *do problema posto, a solução para* $t > 1$ *deve satisfazer uma condição inicial em* $t = 1$ *que a faça coincidir com o valor da solução no intervalo* $0 \leq t \leq 1$*:*

$$y(1) = 2 - 2e^{-1} \ .$$

Assim impõe-se $ke^{-1} = 2 - 2e^{-1}$*, ou seja,* $k = 2e - 2$.
Solução:

$$y(t) = \begin{cases} 2 - 2e^{-t} \ , & 0 \leq t \leq 1 \\ (2e-2)e^{-t} \ , & t > 1 \ . \end{cases}$$

Verificação:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} \frac{d}{dt}[2-2e^{-t}] = 2e^{-t}\ , & 0 \le t < 1 \\ \frac{d}{dt}[(2e-2)e^{-t}] = (2-2e)e^{-t}\ , & t > 1\ . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} + y &= \begin{cases} 2e^{-t} + 2 - 2e^{-t} = 2\ ,\ 0 \le t < 1 \\ (2-2e)e^{-t} + (2e-2)e^{-t} = 0\ ,\ t > 1 \end{cases} \\ &= g(t) \quad \textit{para } t \neq 1 \qquad \textit{– ok!} \end{aligned}$$

□

Comentário: *Esta "solução" contínua não é de classe C^1, porque os limites laterais de $\frac{dy}{dt}$ em $t = 1$ são diferentes:*

$$\lim_{t\to 1^-} \tfrac{dy}{dt} = \lim_{t\to 1^-} 2e^{-t} = 2e^{-1}$$

$$\lim_{t\to 1^+} \tfrac{dy}{dt} = \lim_{t\to 1^+} (2-2e)e^{-t} = (2-2e)e^{-1}\ .$$

Portanto, esta "solução" não é solução do problema de valor inicial no sentido estrito da definição de "solução de equação diferencial" onde se impõe ter primeira derivada contínua (i.e., ser de classe C^1). ♢

(23) Prove que $y(t) = -1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = t(1+y) \\ y(0) = -1\ . \end{cases}$$

Resolução: *A função $y(t) = -1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é claramente solução do problema dado porque*

$$\frac{d}{dt}(-1) = 0 \qquad \textit{e} \qquad t(1+(-1)) = 0\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

Como $f(t, y) = t(1 + y)$ é uma função de classe C^1 definida em $\mathbb{R}^2$, ela é localmente lipschitziana relativamente a y em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Picard, qualquer problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) = t(1+y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Em particular, $y(t) = -1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é a única solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = t(1+y) \\ y(0) = -1\ . \end{cases}$$

□

(24) Determine todas as soluções de classe C^1 do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}\ , \qquad y(0) = 0\ .$$

(25) Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = t\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = -1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Para $|y| < 1$ a equação pode ser resolvida como equação separável. Obtenha dessa maneira um par de soluções com a propriedade $y(t) \to -1$ quando $t \to 0^+$ ou $t \to 0^-$, cole-as e estenda ao resto de $\mathbb{R}$ como constante.

Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

Resolução: *De acordo com a sugestão, resolve-se a equação diferencial para $|y| < 1$ como equação separável:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = t\sqrt{1-y^2} &\iff \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-y^2}} = t \\ &\iff \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int t\,dt + c \\ &\iff \arcsin y = \frac{t^2}{2} + c \\ &\iff y(t) = \sin(\frac{t^2}{2} + c)\ . \end{aligned}$$

Para que $y(0) = -1$, escolhemos $c = -\frac{\pi}{2}$.
Para que $|y| < 1$, o argumento do seno tem que ser

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} &\iff 0 < t^2 < 2\pi \\ &\iff t \in]-\sqrt{2\pi}, 0[\text{ ou } t \in]0, \sqrt{2\pi}[\ . \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} y^-(t) &= \sin(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{\pi}{2})\ , \qquad t \in]-\sqrt{2\pi}, 0[\ , \\ y^+(t) &= \sin(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{\pi}{2})\ , \qquad t \in]0, \sqrt{2\pi}[\ . \end{aligned}$$

Estas soluções podem-se colar em $t = 0$ e podem-se estender para $t \geq \sqrt{2\pi}$ ou $t \leq -\sqrt{2\pi}$ como sendo a constante 1.

<u>Solução:</u>

$$y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2})\ , & |t| < \sqrt{2\pi} \\ 1\ , & |t| \geq \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

Note-se que esta função é continuamente diferenciável em todo o $\mathbb{R}$ (em particular, a derivada em $t=-\sqrt{2\pi}$ ou em $t=0$ ou em $t=\sqrt{2\pi}$ é 0).

Verificação:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} t\cos(\frac{t^2}{2}-\frac{\pi}{2}) \ , & |t|<\sqrt{2\pi} \\ 0 \ , & |t|\geq\sqrt{2\pi} \end{cases}$$

$$t\sqrt{1-y^2} = \begin{cases} t\sqrt{1-\sin^2(\frac{t^2}{2}-\frac{\pi}{2})} \ , & |t|<\sqrt{2\pi} \\ 0 \ , & |t|\geq\sqrt{2\pi} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t\cos(\frac{t^2}{2}-\frac{\pi}{2}) \ , & |t|<\sqrt{2\pi} \\ 0 \ , & |t|\geq\sqrt{2\pi} \end{cases} \qquad \textit{– ok!}$$

Relação com o teorema de Picard: A equação diferencial é da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

com $f(t,y)=t\sqrt{1-y^2}$ definida para $t\in\mathbb{R}$ e $y\in[-1,1]$.

Pelo teorema de Picard, a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

existe e é única se f for localmente lipschitziana em relação a y num domínio contendo (t_0,y_0).

Neste caso, a função $f(t,y)=t\sqrt{1-y^2}$ não *é localmente lipschitziana em relação a y para qualquer domínio contendo $(t_0,y_0)=(0,-1)$. A condição falha exactamente em $y=-1$ porque*

$$\lim_{y\to-1}\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y\to-1}\frac{-ty}{\sqrt{1-y^2}} = \infty \qquad \textit{para } t\approx 0 \ , t\neq 0 \ ,$$

o que implica que

$$\lim_{y\to-1}\frac{f(t,y)-f(t,-1)}{y-(-1)} = \infty \qquad \textit{para } t\approx 0 \ , t\neq 0 \ .$$

Logo, qualquer que seja o intervalo $[-1,-1+\varepsilon]$, não pode existir uma constante L_ε satisfazendo[4]

$$|f(t,y)-f(t,-1)| \leq L_\varepsilon|y+1| \ , \qquad \forall y\in[-1,-1+\varepsilon] \ ,$$

para $t\approx 0$, $t\neq 0$. □

Comentário:

- *A função $f(t,y)$ é localmente lipschitziana em relação a y para $y\in]-1,1[$, porque a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua para $y\in]-1,1[$.*
- *A função $y(t)=\sin(\frac{t^2}{2}-\frac{\pi}{2})$, $\forall t\in\mathbb{R}$, não é solução da equação diferencial. De facto, a igualdade $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$ usada na verificação só é verdadeira quando $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ para algum $k\in\mathbb{Z}$. Para outros valores de x, o co-seno é negativo e tem-se $\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$.*

[4] Cf. definição de *função localmente lipschitziana*.

$\diamondsuit$

(26) Mostre que a solução do seguinte problema de valor inicial existe, é única e está definida para $0 \leq t \leq 1$:

$$\dot{y} = y^2 + \cos t^2 \ , \quad y(0) = 0$$

Resolução: *Esta equação não pode ser resolvida explicitamente pelos métodos estudados. No entanto, a resolução explícita não é necessária para responder à questão.*

A função $f(t, y) = y^2 + \cos t^2$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e portanto, o teorema de Picard garante a existência e unicidade da solução do problema de valor inicial. O teorema garante também que a solução do problema de valor inicial pode ser prolongada a um intervalo máximo de definição $]a, b[$ (contendo 0) tal que quando $t \to a^+$ ou $t \to b^-$, $(t, y(t))$ tende para a fronteira do domínio de f. Uma vez que f está definida em todo o $\mathbb{R}^2$, isto significa que $(t, y(t)) \to \infty$ nos extremos do intervalo de definição. Em particular, se a (respectivamente b) for finito então a solução explode *para $t = a$ (respectivamente $t = b$), isto é, $y(t) \to \infty$ quando $t \to a$ (respectivamente $t \to b$).*

Assim, para mostrar que o intervalo de definição da solução contém $[0, 1]$ é suficiente mostrar que a solução $y(t)$ não explode para $t \leq 1$. Uma maneira de fazer isto é arranjar dois problemas de valor inicial

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) \ , \quad u(0) = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = g(t, v) \ , \quad v(0) = 0$$

cujos intervalos de definição contenham $[0, 1]$ e que verifiquem

$$u(t) \leq y(t) \leq v(t)$$

Para que esta última condição seja verificada basta [5] *que*

$$f(t, y) \leq y^2 + \cos t^2 \leq g(t, y)$$

Uma vez que, para $0 \leq t \leq 1$ se tem

$$0 \leq y^2 + \cos t^2 \leq y^2 + 1$$

pode-se considerar os problemas de valor inicial

$$\frac{du}{dt} = 0 \ , \quad u(0) = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = v^2 + 1 \ , \quad v(0) = 0$$

O primeiro tem solução constante $u(t) = 0$. Quanto ao segundo, trata-se de uma equação separável

$$\frac{1}{v^2 + 1} \cdot \frac{dv}{dt} = 1$$

$$\iff \quad \frac{d}{dt}(\arctan v) = 1$$

$$\iff \quad v(t) = \tan(t + c)$$

em que c é uma constante real. A condição inicial implica $c = 0$, portanto a solução é

$$v(t) = \tan t$$

[5] *Ver Proposição 3.2.11, página 160, do livro "Equações Diferenciais Ordinárias" por Fernando Pestana da Costa.*

com intervalo máximo de definição $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. *Conclui-se que*

$$0 \le y(t) \le \tan t, \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 1$$

o que mostra que o intervalo de definição de $y(t)$ *contém* $[0,1]$.

□

(27) Mostre que as soluções dos seguintes problemas de valor inicial existem, são únicas e estão definidas nos intervalos indicados:

(a) $\dot{y} = y + e^{-y} + e^{-t} \quad , \; y(0) = 0 \quad , 0 \le t \le 1$

(b) $\dot{y} = e^{-t} + \ln(1+y^2) \quad , \; y(0) = 0 \quad , 0 \le t < +\infty$

Campos de Direcções

(28) Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de solução da equação diferencial

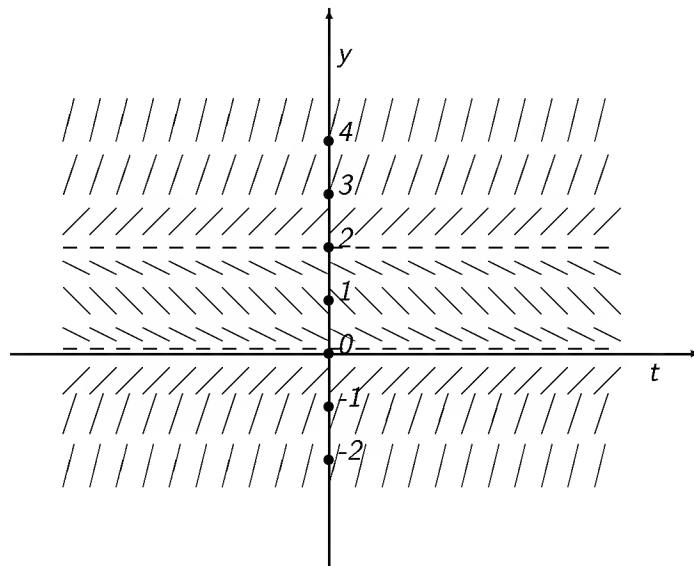
$$\frac{dy}{dt} = y(y-2)\ .$$

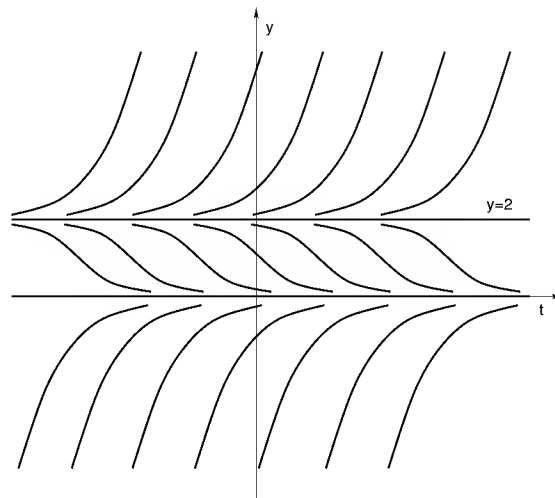
Resolução: *Para cada* $c \in \mathbb{R}$, *o conjunto dos pontos* $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ *onde o gráfico da solução* $y(t)$ *tem declive* $\frac{dy}{dt} = c$, *é determinado pela equação*

$$y(y-2) = c\ .$$

Casos especiais:

$c < -1$	$y^2 - 2y - c = 0 \iff y = 1 \pm \sqrt{1+c}$ *é impossível*
$c = -1$	$y^2 - 2y + 1 = 0 \iff y = 1$
$c = -\frac{1}{2}$	$y^2 - 2y + \frac{1}{2} = 0 \iff y = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
$c = 0$	$y = 0$ *ou* $y = 2$
$c = 1$	$y^2 - 2y - 1 = 0 \iff y = 1 \pm \sqrt{2}$
$c = 3$	$y^2 - 2y - 3 = 0 \iff y = 1 \pm 2$
$c = 8$	$y^2 - 2y - 8 = 0 \iff y = 1 \pm 3$

Esboço do campo de direcções:

Traçado dos tipos de solução:

□

(29) Esboce os campos de direcções e trace os vários tipos de solução para as seguintes equações diferenciais

(a) $\dot{y} = y(y^2 - 1)$

(b) $\dot{y} = t^2 + y^2$

(c) $\dot{y} = \frac{y+t}{y-t}$